1 Предисловие

Эта статья в HTML-формате может быть найдена по адресу.

Пока она свежая в ней могут быть ошибки и опечатки, в том числе в формулах, но за конечный результат я ручаюсь.

2 Суммы бесконечных рядов

В этой статье будет рассмотрена тема суммы бесконечных рядов вроде:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... \tag{1}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... \tag{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + ... \tag{3}$$

И так далее...

При этом одни скажут что сумма этих рядов равна бесконечности и обсуждать здесь нечего, другие, более продвинутые в вопросе, вспомнят дзета функцию Римана, скажут что $(1) = -\frac{1}{2}$, $(2) = -\frac{1}{12}$, $(3) = 0$ и тоже добавят, что обсуждать здесь нечего. Но что если я скажу, что здесь не всё чисто? Что если я скажу что значение суммы этих рядов зависит... От чего она зависит чуть позже.

Итак возьмём к примеру первый ряд два раза, но второй раз сдвинем его на один элемент:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & ... \\ & & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & ... \end{array}$$

Вычтем второй ряд из первого и в результате получим:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & ... & = & 1 \end{array}$$

Если сдвинуть второй ряд на два элемента то аналогично разница будет 2, на три – 3 и т.д. Но как же так? Дзета функция Римана не предполагает подобных результатов и согласно ей результат будет равен строго нулю.

Но мы рассмотрим этот парадокс ближе и выведем, что таким образом сумма (1) зависит от сдвига m и если обозначить значение при $m = 0$ как ω_0, то не трудно вывести формулу для суммы (1) со сдвигом m:

$$\Omega(0)_{\to m} = \omega_0 - m$$

Забегая вперёд заметим, что $\omega_0 = 0$, потому что скоро мы уже будем использовать это значение, но попутно мы покажем откуда оно берётся.

Во всяких доказательствах того что $(2) = -\frac{1}{12}$, активно используют ещё одну операцию помимо сдвига. Это разрядка:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & ... \\ & & 2 & + & & & 2 & + & & & 2 & + & ... \end{array}$$

В первой строке разреженность x равна 1, во второй $x = 2$, $m = 1$. Разница этих строк равна другому известному ряду:

$$1 \text{ - } 1 + 1 \text{ - } 1 + 1 \text{ - } 1 + ... = \tfrac{1}{2}$$

Сумму (1) с разреженностью x и сдвигом m обозначим $\Omega(0)_{/x \to m}$ и приведём пару её свойств:

$$\sum_{i=0}^{x-1} \Omega(0)_{/x \to m+i} = \Omega(0)_{/x \to m}$$

$$\Omega(0)_{/x \to m} - 2 \cdot \Omega(0)_{/2 \cdot x \to m+x} = \frac{1}{2}$$

Этих двух свойств достаточно чтобы вывести формулу для разреженности $x = 2$:

$$\Omega(0)_{/2 \to m} = \frac{1 - 2m}{4}$$

А если поиграться с другими значениями m кратными двум, то зная значения таких рядов как:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \text{-} & 1 & \text{-} & 1 & + & 1 & + & ... \\ 1 & + & 1 & \text{-} & 1 & \text{-} & 1 & + & ... \end{array}$$

Легко вывести обобщённую формулу для суммы (1):

$$\Omega(0)_{/x \to m} = \frac{x - 2m - 1}{2x}$$

Но не будем останавливаться и перейдём к выводу формул для других степеней ряда:

$$1 + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k + 7^k + ...$$

Которую мы обозначим как многие уже догадались за $\Omega(k)_{/x \to m}$. А сумму n её членов за $S_k(n)$.

Сперва выведем формулу для $\Omega(k)$ (Если опущены, то $x = 1$, $m = 0$).

Рассмотрим бесконечный треугольник:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
 & 2^k & 2^k & 2^k & 2^k & 2^k & 2^k & 2^k & \ldots \\
 & & 3^k & 3^k & 3^k & 3^k & 3^k & 3^k & \ldots \\
 & & & 4^k & 4^k & 4^k & 4^k & 4^k & \ldots \\
 & & & & 5^k & 5^k & 5^k & 5^k & \ldots \\
 & & & & & 6^k & 6^k & 6^k & \ldots \\
 & & & & & & 7^k & 7^k & \ldots \\
 & & & & & & & 8^k & \ldots \\
 & & & & & & & & \ldots \\
 & & & & & & & & \;\,.\,. \\
 & & & & & & & & \quad .
\end{array}
$$

Суммируя его в трёх направлениях (по горизоантали, вертикали и диагонали) получим три суммы, которые равны между собой:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Omega(k)_{\to i+m} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} S_k(i)\right)_{\to m} = \sum_{i=1}^{\infty} i^k \left(1 - m - i\right)$$

С первой формулой мы ничего делать не будем, а вот другие две возьмём на вооружение и запишем чему они равны при $m = 1$:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} S_k(i)\right)_{\to 1} = -\sum_{i=1}^{\infty} i^{k+1}$$

Раскроем обозначение S и используем обозначение Ω:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{a_{k,j} \cdot i^j}{b_k}\right)_{\to 1} = -\Omega(k+1)$$

Вот из этой формулы следует, что при $k = -1$ $\Omega(0) = 0$. Несмотря на что для её вывода мы использовали сам этот факт, мы здесь просто не приходим к противоречию, при других же значениях $\Omega(0)$ будет противоречие.

Вынем $(k+1)$-й член суммы слева из под знака суммы и поменяем местами знаки сумм (от перемены мест слагаемых сумма не меняется):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k,k+1} \cdot i^{k+1}}{b_k}\right)_{\to 1} + \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k,j} \cdot i^j}{b_k}\right)_{\to 1} = -\Omega(k+1)$$

Обозначим бесконечные, суммы используя Ω-нотацию:

$$\frac{a_{k,k+1}}{b_k} \cdot \Omega(k+1)_{\to 1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k,j}}{b_k} \cdot \Omega(j)_{\to 1} = -\Omega(k+1)$$

Умножим всё на $\frac{b_k}{a_{k,k+1}}$:

$$\Omega(k+1)_{\to 1} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k,j}}{a_{k,k+1}} \cdot \Omega(j)_{\to 1} - \frac{b_k}{a_{k,k+1}} \Omega(k+1) \tag{4}$$

Далее отставим пока эту формулу и выведём ещё одну для $\Omega(k+1)_{\to 1}$, используя равенство:

$$(n+1)^k - n^k = \sum_{i=1}^{k-1} d_{k,i} \cdot n^{k-i} + 1$$

Получим:

$$\Omega(k+1)_{\to 1} = \Omega(k+1) - \left(\sum_{i=1}^{k} d_{k+1,i} \cdot \Omega(-i)_{\to 1} + \Omega(0)_{\to 1} + 1 \right) \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует (мы использовали факт $\Omega(0)_{\to 1} + 1 = 0$):

$$\Omega(k+1) \cdot \left(1 + \frac{b_k}{a_{k,k+1}} \right) = \sum_{i=1}^{k} d_{k+1,i} \cdot \Omega(-i)_{\to 1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k,j}}{a_{k,k+1}} \cdot \Omega(j)_{\to 1}$$

Ещё немного поколдуем и получим:

$$\Omega(k+1) = \frac{a_{k,k+1}}{a_{k,k+1} + b_k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\left(d_{k+1,i} - \frac{a_{k,j}}{a_{k,k+1}} \right) \cdot \Omega(-i)_{\to 1} \right)$$

Пока нас интересует $\Omega(1)$, которая из формулы очевидна равна нулю.

Введём ещё одну важную операцию над рядом n^k. Пусть сумма состоящая из каждого q-го члена начиная с p-ого $(1 \leq p \leq q)$ этого ряда обозначается как $\Omega(k)_{*\frac{p}{q} \to m}$, например:

$$\Omega(1)_{*\frac{2}{3}} = 0 + 2 + 0 + 0 + 5 + 0 + 0 + 8 + 0 + 0 + 11 + ...$$

Можно показать что:

$$\Omega(k)_{*\frac{p}{q} \to m} = q^k \cdot \Omega(k)_{/q \to p+m-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \cdot d_{k,i} \cdot (1-p)^i \cdot \Omega(k-i)_{/q \to p+m-1} + \\ + (-1)^k \cdot (q-p)^k \cdot \Omega(0)_{/q \to p+m-1}$$

Используя это обозначение немного играя с разреженностью можно вывести:

$$\Omega(k)_{\to m} = \sum_{i=0}^{x-1} x^k \cdot \Omega(k)_{/x\to m+i} - \sum_{j=1}^{x-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} d_{k,i} \cdot (x-j)^i \cdot \Omega(k-i)_{*\frac{j}{x}\to m} + \right.$$
$$\left. +(x-j)^k \cdot \Omega(0)_{/x\to m+j-1} \right) \tag{6}$$

Далее усовершенствуем немного формулу (5):

$$\Omega(k+1)_{/x\to x\cdot m} = \Omega(k+1)_{/x} - \left(\sum_{i=1}^{k} d_{k+1,i} \cdot m^{k-i}\Omega(-i)_{/x\to x\cdot m} + \right.$$
$$\left. +m^{k+1}\Omega(0)_{/x\to x\cdot m} + \sum_{i}^{m} i^{k+1} \right) \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) используются совместно следующим образом. В формуле (7) раскрываются суммы и все Ω уже известных степеней, далее осуществляется переход $m = \frac{m}{x}$. Далее заменяется $\Omega(k)_{/x\to m}$ в формуле (6) только что полученным значением при $m = 0$. Из полученного равенства выводится формула для $\Omega(k+1)_{/x}$. Наконец это значение подставляется в формулу выведенную из (7) и у нас готовая формула!

Я приведу здесь формулы для первых двух степеней:

$$\Omega(1)_{/x\to m} = \frac{5x^2 - 6x + 1}{12x^2} + \frac{-2mx + m^2 + m}{2x^2}$$

$$\Omega(2)_{/x\to m} = \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{6x^3} + \frac{-6mx^2 + 6m^2x + 6mx - 2m^3 - 3m^2 - m}{6x^3}$$

Можно заметить, что все формулы (за исключением нулевой степени) заметно упрощаются при переходе $m = x + m$:

$$\Omega(0)_{/x\to x+m} = -\frac{x+1}{2x} - \frac{m}{x}$$
$$\Omega(1)_{/x\to x+m} = -\frac{x^2-1}{12x^2} - \frac{m^2+m}{2x^2}$$
$$\Omega(2)_{/x\to x+m} = \frac{2m^3+3m^2+m}{6x^3}$$
$$\Omega(3)_{/x\to x+m} = \frac{x^4-1}{120x^4} - \frac{m^4+2m^3+m^2}{4x^4}$$

$$\Omega(4)_{/x\to x+m} = -\frac{6m^5 - 15m^4 - 10m^3m}{30x^5}$$

Когда есть пять формул на лицо становится очевидной их закономерность: дело в том что в левой их части находится $\frac{x^{k+1}-1}{x^{k+1}}$ помноженное на значение Дзета-функции Римана, а в правой - формула суммы первых m членов ряда n^k.

Немного поколдовав получим обобщённую формулу:

$$\Omega(k)_{/x\to x+m} = \frac{\zeta(-k)\ \left((-x)^{k+1} - 1\right) + \sum\limits_{i=1}^{m} i^k}{(-x)^{k+1}}$$

Эта формула не противоречит существующим данным о сумме некоторых бесконечных рядов:

$$\Omega(0)_{/x\to x+m} - 2\cdot\Omega(0)_{/2x\to 2x+m} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \frac{1}{2}$$

$$\Omega(1)_{/x\to x+m} - 4\cdot\Omega(1)_{/2x\to 2x+m} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... = \frac{1}{4}$$

3 Как всё это понимать

Не трудно заметить что при $x = 0$ наша формула обращается в бесконечность. Таким образом те кто утверждает, что сумма n^k рядов равна бесконечности правы, но сваливают всё в одну кучу, т.е. пытаются просуммировать ряд с нулевой разреженностью. При $x = -\frac{1}{\sqrt[k+1]{2}}$ и $m = 0$ Ω-функция обращается в ζ-функцию, Таким образом те кто утвержадает что значение этих рядов совпадает с Дзета-функцией Римана тоже правы, но разреженность в этом случае явлется мало того что отрицательной, так ещё и дробной, что делает такие выводы совсем не интуитивными.

А теперь о том как интуитивно представить результаты полученные с помощью Ω-функции. Дело в том что я давно подозревал, что числовая ось - на самом деле кольцо. Это следует из предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

При стремлении сверху мы получаем в пределе $+\infty$, при стремлении снизу – $-\infty$. Таким образом получается, что это одно и то же значение.

Продолжая эту мысль, представим, что происходит с рядом n при движении за бесконечность. Правильно! Оно превращается в минус бесконечность и уходит к нулю с отрицательными значениями членов ряда:

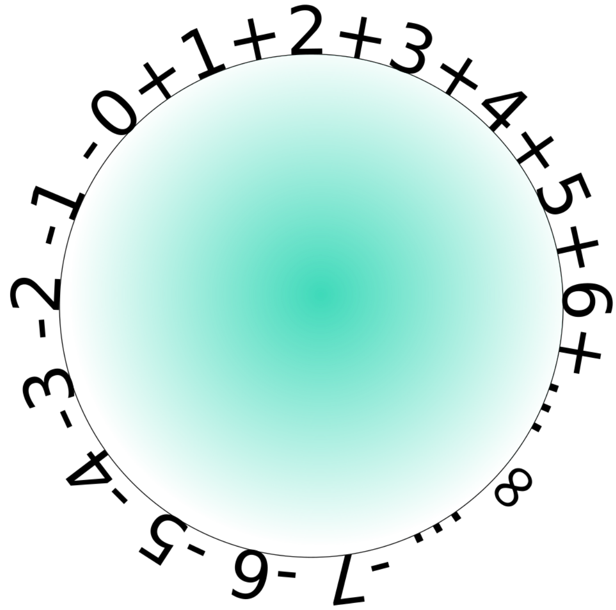

Рис. 1: Числовое кольцо

Сумма такой последовательности на кольце совершенно интуитивно равна нулю. При смещении последовательности в право на единицу, мы выбрасываем крайнюю -1 за ось, таким образом сумма ряда становится равной 1. При смещении ещё на единицу, "за борт"уходит -2 и сумма равна 3. И так далее. Всё это хорошо работает при нечётном k, при чётном в логике появляется явный изъян: и на положительной и на отрицательной полуоси значения положительные, а их сумма всё равно ноль. Объяснить это я не могу, во всяком случае пока.

При разреженности $x > 1$ оказывается что ряд на самом деле как бы "расплывается"до ряда растущего с аналогичной скоростью, но без пробелов. И "за борт"уходят значения именно этого ряда, а не начального.

Вот такие пироги, вот такие бесконечности...

Автор: Николай (unDEFER) Кривченков

Дата публикации: 24.11.2019